Ejercicios de Análisis Matemático
Funciones elementales

1. Estudia cuales de las siguientes igualdades son ciertas y, cuando no lo sean, proporciona un contraejemplo. Se supone que f, g, h son funciones definidas en $\mathbb{R}$.

   a) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

   b) $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$.

   c) $\dfrac{1}{f \circ g} = \dfrac{1}{f} \circ g$.

   d) $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \dfrac{1}{g}$.

2. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Indica el dominio natural de definición de la función h dada por la regla que en cada caso se indica.

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad h(x) = \operatorname{arc\,sen}(f(x)), \quad h(x) = \log(f(x)), \qquad h(x) = \sqrt{f(x)}$$
$$h(x) = \operatorname{argcosh}(f(x)), \quad h(x) = \operatorname{arc\,cos}(f(x)), \quad h(x) = \operatorname{arc\,tg}(f(x)), \quad h(x) = g(x)^{f(x)}$$

3. Una función f es *par* si $f(-x) = f(x)$ e *impar* si $f(-x) = -f(x)$.

   a) Estudia si la suma, el producto y la composición de funciones pares o impares es una función par o impar. Considera todos los casos posibles.

   b) Prueba que toda función puede escribirse de forma única como suma de una función par y una función impar.

4. Prueba que la función dada por $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Deduce que

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

5. Indica, justificando tu respuesta, los intervalos que:

   - No tienen máximo ni mínimo.
   - Tienen máximo pero no tienen mínimo.
   - Tienen mínimo pero no tienen máximo.
   - Tienen máximo y mínimo.

6. Compara $a^{\log b}$ con $b^{\log a}$.

7. Prueba que $\log(x + \sqrt{1+x^2}) + \log(\sqrt{1+x^2} - x) = 0$.

8. Resuelve $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

9. Simplifica las expresiones $a^{\log(\log a)/\log a}$, $\log_a(\log_a(a^{a^x}))$.

10. Indica cuál de los dos números $1234567^{1234568}$ y $1234568^{1234567}$ es el mayor.

11. Prueba las igualdades siguientes.

$$\cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\tan(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ \ \forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{arc\,cos} x + \operatorname{arc\,sen} x = \frac{\pi}{2} \ \ \forall x \in [-1,1]$$

12. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 = 1$, $a \neq -1$. Definamos $\vartheta = 2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{b}{a+1}$. Prueba que $\cos\vartheta = a$, $\operatorname{sen}\vartheta = b$.

13. Prueba que $\operatorname{tg}(x+y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$. ¿Qué excepciones hay que hacer?.

14. Indica para qué valores de x e y se verifica la igualdad $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+y}{1-xy}$.

15. Calcula x por la condición $\operatorname{arc\,tg}(2x) + \operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{\pi}{4}$.

16. Deduce las expresiones de las funciones hiperbólicas inversas.

17. Prueba que $\operatorname{arc\,tg}(\mathrm{e}^x) - \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tgh}(x/2)) = \dfrac{\pi}{4}$.

18. Simplifica las expresiones

    a) $\operatorname{senh}^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \operatorname{sen}^2 y$.

    b) $\dfrac{\cosh(\log x) + \operatorname{senh}(\log x)}{x}$.

19. Prueba que $2 \operatorname{argtgh}(\operatorname{tg} x) = \operatorname{argtgh}(\operatorname{sen} 2x)$.

20. Define las funciones secante y cotangente hiperbólicas y estudia sus inversas.

21. Obtener fórmulas de adición para el seno, coseno y tangente hiperbólicos.

22. Dibuja la gráfica de la función $y = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$.

23. Prueba las igualdades:

$$\cos a = 4\cos^3(a/3) - 3\cos(a/3) = 2\cos^2(a/2) - 1$$

y, usando que $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$, deduce el valor de $\cos(\pi/6)$, $\cos(\pi/4)$ y $\cos(\pi/8)$.